Der Flugzeugstart auf dem Laufband

Wir stehen auf einem Flugplatz mit der besagten neuen, innovativen Startbahn in Form eines Laufbandes und betrachten ein Düsenflugzeug der Masse m_F. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden die Triebwerke vom Leerlauf auf volle Leistung gefahren. Alle Geschwindigkeiten in der folgenden Rechnung messen wir in Bezug auf den (ruhenden) Flugplatz bzw. uns.

Auf das Flugzeug wirken im wesentlichen zwei Kräfte: Der Rückstoß der Triebwerke F_T und die Reibungskraft F_R der Räder mit dem Boden. Zum Lösen der Aufgabe brauchen wir lediglich die Formel „Kraft F ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses p“ und das Prinzip „actio = reactio“.

Die Triebwerke stoßen heiße Gase der Masse m mit der Geschwindigkeit v_T aus. Für die auf das Flugzeug mit der Geschwindigkeit v_F wirkende Kraft (den „Rückstoß“) F_T gilt dann:

$$F_T = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m \cdot (v_T - v_F)\right] = \frac{dm}{dt} \cdot (v_T - v_F) \tag{1}$$

Die von den Triebwerken ausgestoßende Masse pro Zeit wollen wir mit dem Massenstrom M_S bezeichnen. Die Vortriebskraft ist also:

$$F_T = M_S \cdot (v_T - v_F) \tag{2}$$

Nun zur Reibungskraft. Wie alle Reibungskräfte ist auch die Rollreibung F_R eine Kraft, die der Relativgeschwindigkeit der beiden Körper (Flugzeug und Laufband) proportional ist. Die Proportionalitätskonstante γ hat die Einheit N/(m/s) bzw. kg/s. Ich weise darauf hin, dass γ die selbe Dimension hat wie der Massenstrom, der das Flugzeug vorantreibt. Im besonderen sind Reibungskräfte der Bewegung immer entgegen gerichtet (daher das Minuszeichen).

$$F_R = -\gamma \cdot (v_F - v_B) \tag{3}$$

v_B ist die Geschwindigkeit des Laufbandes. Gemäß Aufgabenstellung soll sich das Laufband mit der selben Geschwindigkeit, aber in entgegen gesetzter Richtung bewegen wie das Flugzeug. Also gilt mit $v_B = -v_F$ für die Rollreibung:

$$F_R = -2\gamma \cdot v_F \tag{4}$$

Die Summe aus Vortriebs- und Reibungskraft sorgt für die Änderung der Geschwindigkeit v_F des Flugzeugs mit der Masse m_F.

$$m_F \frac{dv_F}{dt} = M_S \cdot (v_T - v_F) - 2\gamma \cdot v_F \tag{5}$$

$$\frac{dv_F}{dt} = \frac{M_S}{m_F} v_T - \frac{M_S + 2\gamma}{m_F} v_F \tag{6}$$

Durch Lösen der Differentialgleichung (das erklär' ich jetzt nicht auch noch ...) erhalten wir für die Geschwindigkeit des Flugzeugs zum Zeitpunkt t

$$v_F = \frac{M_S}{M_S + 2\gamma} v_T \left[1 - \exp\left(- \frac{M_S + 2\gamma}{m_F} \cdot t \right) \right] \quad . \tag{7}$$

Als Endgeschwindigkeit des Flugzeugs auf der Bahn erhält man für $t \longrightarrow \infty$

$$v_F = \frac{M_S}{M_S + 2\gamma} v_T \quad . \tag{8}$$

Was lernen wir daraus:

1. Probleme lassen sich häufig am einfachsten lösen, wenn man sie aufs Wesentliche reduziert. (*Ja, aber halten die Reifen denn solche Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, etc. aus? ...*)
2. **Ja, die Maschine hebt ab**, wenn die Rollreibung klein und die Triebwerke stark genug sind, dass die Endgeschwindigkeit größer als die Abhebegeschwindigkeit (hängt von der Masse des Flugzeugs und dem Auftrieb der Tragflächen ab) ist.
3. Mit Laufband ist die Rollreibung doppelt so groß wie bei ruhendem Boden ($v_B = 0$).
4. Bei geringer Reibung ist die Endgeschwindigkeit allein durch die Leistungsfähigkeit der Triebwerke bestimmt, d.h. ausgestoßene Masse an heißen Gasen pro Zeit und deren Geschwindigkeit. Insbesondere hängt sie nicht von der Masse des Flugzeugs ab. Der Startweg, d.h. der Weg bis zum Erreichen der Abhebegeschwindigkeit, hängt aber sehr wohl von der Masse ab! Piloten müssen ihn aus Sicherheitsgründen vor jedem Start für die gegebenen Bedingungen neu berechen.
5. Gibt es keine Reibung ($\gamma = 0$), z.B. bei Raketen im Vakuum, dann ist die erreichbare Endgeschwindigkeit bestimmt durch die Ausströmgeschwindigkeit der Gase aus der Düse. Daher sind Ionentriebwerke auf langen Strecken so effizient.